1.- Dada la función $f(x) = x\cdot e^{-ax^2}$, $a \in R$.

a) (1 punto) Determina los valores de $a \in R$ para que la función f(x) sea continua en R y tenga la asíntota horizontal y = 0.

b) (1 punto) Calcula, para el valor a = 1/2, el área que encierra la gráfica de la curva f(x) entre el eje y las rectas x = 0 y x = 1.

Solución

Dada la función $f(x) = x\cdot e^{-ax^2}$, $a \in R$.

(a)

Determina los valores de $a \in R$ para que la función f(x) sea continua en R y tenga la asíntota horizontal y = 0

La función exponencial e^{-ax^2} es continua en R sea cual sea el valor de a, **luego** $f(x) = x\cdot e^{-ax^2}$ **es continua en R por producto de continuas.**

Recordamos la regla de L'Hôpital (L'H), que nos dice que si "f" y "g" son funciones continuas en [a -δ, a + δ], derivables en (a -δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞, y también si x→∞)

Si a > 0, $\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^{-ax^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{ax^2}} = \left\{\frac{+\infty}{+\infty}; L'H\right\} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{ax^2}\cdot(2ax)} = \frac{1}{+\infty} = 0$, **luego y = 0 es una asíntota horizontal de f en +∞ si a > 0.**

Si a < 0, $\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^{-ax^2}\right) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty = 0$, **luego no existe asíntota horizontal de f si a > 0.**

(b)

Calcula, para el valor a = 1/2, el área que encierra la gráfica de la curva f(x) entre el eje y las rectas x= 0 y x = 1.

Para a = 1/2, tenemos $f(x) = x\cdot e^{-x^2/2}$.

De x = 0, f(x) = 0; y de f(x) = 0 tenemos x = 0 porque $e^{-x^2/2} > 0$.

Área = $\int_0^1 x\cdot e^{-x^2/2}\cdot dx = \left\{\begin{array}{l} t = e^{-x^2/2},\ dt = e^{-x^2/2}\cdot(-x)\cdot dx;\ -dt = x\cdot e^{x^2/2}\cdot dx \\ \text{si } x = 0 \to\ t = e^0 = 1;\ \text{si } x = 1 \to\ t = e^{-1/2} \end{array}\right\} = \int_1^{e^{-1/2}}(-dt) = [-t]_1^{e^{-1/2}} = (-e^{-1/2}) - (-1)\ u^2 =$

= $\mathbf{(1 - e^{-1/2})\ u^2 \cong 0'393469\ u^2}$

2.- Para la siguiente función: $f(x) = \frac{2x^3 + ax^2 + bx + 3}{-x^3 + 4x^2 - 5x + 2}$, $a, b \in R$.

Calcula los valores de $a, b \in R$, para que $\lim_{x\to 1} f(x) = L \in R$, , y determina el valor de dicho límite.

Solución

$\lim_{x\to1}\left(\frac{2x^3 + ax^2 + bx + 3}{-x^3 + 4x^2 - 5x + 2}\right) = \frac{a+b+5}{-1+4-5+2} = \frac{a+b+5}{0}$, de donde a + b + 5 = 0 para poder seguir aplicándole la regla de L'Hôpital puesto que existe el límite.

$\lim_{x\to1}\left(\frac{2x^3 + ax^2 + bx + 3}{-x^3 + 4x^2 - 5x + 2}\right) = \left\{\frac{0}{0}; L'H\right\} = \lim_{x\to1}\left(\frac{6x^2 + 2ax + b}{-3x^2 + 8x - 5}\right) = \frac{2a+b+6}{-3+8-5} = \frac{2a+b+6}{0}$, de donde 2a + b + 6 = 0 para poder seguir aplicándole la regla de L'Hôpital puesto que existe el límite.

$\lim_{x\to1}\left(\frac{6x^2 + 2ax + b}{-3x^2 + 8x - 5}\right) = \left\{\frac{0}{0}; L'H\right\} = \lim_{x\to1}\left(\frac{12x + 2a}{-6x + 8}\right) = \frac{12 + 2a}{2} = 6 + a$.

$\left\{\begin{array}{l} a + b + 5 = 0 \\ 2a + b + 6 = 0\ (E_2 - E_1) \end{array}\right. \approx \left\{\begin{array}{l} a + b + 5 = 0 \\ a + 1 = 0 \end{array}\right.$, **de donde a = -1, b =** -5-(-1) **= -4 y el límite L =** 6 + (-1) **= 5**.

3.- Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones: $f(x) = 3x + 2x^2$, $g(x) = x^2 + 4x + 2$.
Solución
Las gráficas de las funciones $f(x) = 3x + 2x^2$ y $g(x) = x^2 + 4x + 2$ son ambas de parábolas son con la forma ($\cup$) por que el número que multiplica a x^2 es positivo.

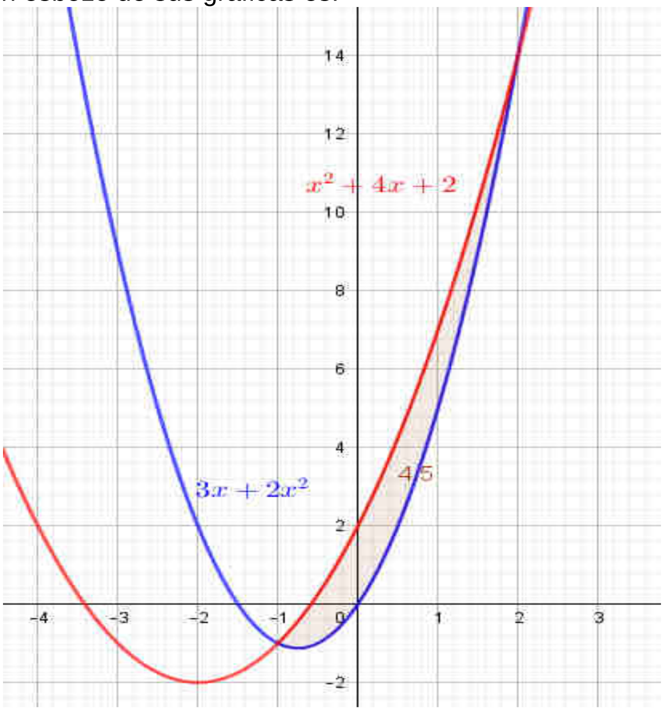
La abscisa del vértice de $f(x) = 3x + 2x^2$ es la solución de $f'(x) = 0 = 3 + 4x = 0$, de donde $x = -3/4 = -0'75$ y el vértice es $V_f(-0'75, f(-3/4)) = V_f(-0'75, -1'125)$).

La abscisa del vértice de $g(x) = x^2 + 4x + 2$ es la solución de $g'(x) = 0 = 2x + 4 = 0$, de donde $x = -4/2 = -2$ y el vértice es $V_g(-2, g(-2)) = V_f(-2, -2)$.

Veamos el corte entre ellas.

De $f(x) = g(x) \rightarrow 3x + 2x^2 = x^2 + 4x + 2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$, $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$ es decir $x = -1$ y $x = 2$, es decir se cortan en los puntos (-1, -1) y (2, 14).

Con los datos anteriores un esbozo de sus gráficas es:



Área = $\int_{-1}^{2}(g(x) - f(x))dx = \int_{-1}^{2}(-x^2 + x + 2)dx = \left[-\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = [\,(-8/3 + 2 + 4) - (1/3 + 1/2 - 2)\,]\ u^2 =$

$=$ **$9/2\ u^2 = 4'5\ u^2$.**

4.- Para la siguiente función $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{3 - x^2}$.

a) (1,25 puntos) Estudia la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas, así como de ramas parabólicas. Determina las asíntotas cuando existan.

b) (0,75 puntos) Calcula la recta tangente a la función en el punto $x = 1$.
Solución

Para la siguiente función $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{3 - x^2}$.

(a)
Estudia la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas, así como de ramas parabólicas. Determina las asíntotas cuando existan,
El denominador de $f(x)$ se anula en $3 - x^2 = 0$, de donde $x = \pm\sqrt{(3)} \cong \pm 1'7$, posibles asíntotas verticales.

x = a es una asíntota vertical (A.V.) de f(x) si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

Como $\lim_{x \to -\sqrt{3}^-} \frac{x^2 + x}{3 - x^2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{0^-} = -\infty$; la recta **x = -√(3) ≅ -1'7 es una A.V. de la gráfica de f(x).**

Posición relativa $\lim_{x \to -\sqrt{3}^+} \frac{x^2 + x}{3 - x^2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{0^+} = +\infty$.

Como $\lim_{x \to +\sqrt{3}^-} \frac{x^2 + x}{3 - x^2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{0^+} = +\infty$; la recta **x = +√(3) ≅ +1'7 es una A.V. de la gráfica de f(x).**

Posición relativa $\lim_{x \to +\sqrt{3}^+} \frac{x^2 + x}{3 - x^2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{0^-} = -\infty$.

Como la función es un cociente de funciones polinómicas con igual grado numerados y denominador, sabemos que tiene una asíntota horizontal y será la misma en ±∞.

Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$, la recta y = b es una asíntota horizontal (A.H.) de f(x)

Como $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{-x^2} = \lim_{x \to +\infty} (-1)$, la recta **y = -1 es una asíntota horizontal (A.H) de la gráfica de f(x) en ±∞.**

Posición relativa:

Como $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (-1)] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + x}{3 - x^2} - (-1) \right) = 0^-$, **la gráfica de f está por debajo de y = -1 en +∞.**

Como $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (-1)] = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2 + x}{3 - x^2} - (-1) \right) = 0^+$, **la gráfica de f está por encima de y = -1 en -∞.**

Si hay es este caso A.H en ±∞ **no hay asíntotas oblicuas (A.H.) en ±∞.**

(b)

Calcula la recta tangente a la función en el punto x = 1.

$f(x) = \frac{x^2 + x}{3 - x^2}$; $f'(x) = \frac{(2x + 1)\cdot(3 - x^2) - (x^2 + x)\cdot(-2x)}{(3 - x^2)^2} = \frac{x^2 + 6x + 3}{(3 - x^2)^2}$.

La recta tangente en x = 1 es "y - f(1) = f '(1)(x - 1)".

Tenemos f(1) = (2)/(2) = 1 y f '(1) = (10)/(4) = 5/2 = 2'5 $f'(2) = \frac{e^2\cdot(2^3 - 2\cdot 2^2 - 2 + 1)}{(2^3 - 2)^2} = \frac{-e^2}{36}$.

Luego **la recta tangente en x = 1 es "y - 1 = (2'5)·(x - 1)" → "y = 2'5·x - 1'5".**

5.- Dada la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Determina el valor de k ∈ R para que se verifique $A^2 = 3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) (1 punto) Calcula, para k = 0, la matriz B^n con B = 2A - I, siendo I la matriz identidad de orden 2, y n ∈ N.

Solución

Dada la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix}$.

(a)

Determina el valor de k ∈ R para que se verifique $A^2 = 3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k & k^2+2k \\ -2-k & k^2+k+1 \end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

De 1 – k = 3, tenemos k = -2. De $k^2 + 2k = 0 = k\cdot(k+2)$ tenemos k = 0 y k = -2.

De -2 – k = 0, tenemos k = -2. De $k^2 + k + 1 = 3 \to k^2 + k - 2 = 0$, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$ tenemos k = 1 y k = -2.

El único valor que se repite es k = -2.

(b)

Calcula, para k = 0, la matriz B^n con B = 2A - I, siendo I la matriz identidad de orden 2, y $n \in N$.

Si k = 0, $B = 2A - I = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B^3 = B^2\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$, $B^4 = B^2\cdot B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$,

$B^5 = B^4\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$, $B^6 = B^5\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 1 \end{pmatrix}$…., observando la secuencia

tenemos que $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\cdot n & 1 \end{pmatrix}$.

6.- Dadas las siguientes matrices $A = \begin{pmatrix} 1-m & -1 \\ 2 & 2m \\ m-1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Estudia, según los valores de $m \in R$, el rango de la matriz $P = A\cdot B^T + C$, donde B^T es la matriz traspuesta de B.

b) (1 punto) Para el valor m = 1, calcula la inversa de la matriz P del apartado anterior.

Solución

Dadas las siguientes matrices $A = \begin{pmatrix} 1-m & -1 \\ 2 & 2m \\ m-1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a)

Estudia, según los valores de $m \in R$, el rango de la matriz $P = A\cdot B^T + C$, donde B^T es la matriz traspuesta de B.

$$P = A\cdot B^T + C = \begin{pmatrix} 1-m & -1 \\ 2 & 2m \\ m-1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m+1 & -1 & -m+1 \\ 2 & 2m & 2 \\ m-1 & 1 & m-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m+2 & 0 & -m+2 \\ 2 & 2m+1 & 3 \\ m-1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$$\text{Tenemos } |P| = \begin{vmatrix} -m+2 & 0 & -m+2 \\ 2 & 2m+1 & 3 \\ m-1 & 1 & m \end{vmatrix} \underset{C_3-C_1}{=} \begin{vmatrix} -m+2 & 0 & 0 \\ 2 & 2m+1 & 1 \\ m-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (-m+2)(2m+1-1) = (-m+2)(2m).$$

De |P| = 0 tenemos (-m+2)(2m) = 0, con lo cual m = 2 y m = 0.

Si **$m \neq 0$ y $m \neq 2$ tenemos $|P| \neq 0$ y rango(P) = 3**.

Si **m = 0,** $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **Como $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq 0$, rango(P) = 2**.

Si **m = 2,** $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **Como $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 5 = -3 \neq 0$, rango(P) = 2**.

(b)

Para el valor m = 1, calcula la inversa de la matriz P del apartado anterior.

Si m = 1, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Como $|P| = (-(1)+2)\cdot(2(1)) = 2 \neq 0$, existe la matriz inversa $P^{-1} = \frac{1}{|P|}\cdot Adj(P^t)$.

$$P^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ Adj(P^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{|P|}\cdot Adj(P^t) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -3/2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

7.- Dado el siguiente sistema: $\begin{cases} x + ay + z = 0 \\ x + y + a^2z = 0 \\ x + y + 2az = 0 \end{cases}$.

a) (1 punto) Discute según los valores de a $\in$ R qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado o indeterminado, incompatible).
b) (1 punto) Resuelve el sistema para a = 0.
Solución

Dado el siguiente sistema: $\begin{cases} x + ay + z = 0 \\ x + y + a^2z = 0 \\ x + y + 2az = 0 \end{cases}$.

(a)
Discute según los valores de a $\in$ R qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado o indeterminado, incompatible).

Vemos que es un sistema homogéneo por tanto siempre tiene solución sea cual sea a, porque siempre se verifica que rango(A) = rango(A*).

Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & 2a \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a^2 & 0 \\ 1 & 1 & 2a & 0 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

Tenemos $|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & 2a \end{vmatrix} F_2-F_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2-2a \\ 1 & 1 & 2a \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda fila $= -(a^2-2a)(1-a) = a\cdot(a-2)(a-1)$.

De |A| = 0, tenemos $a\cdot(a-2)(a-1) = 0$, de donde a = 0, a = 1 y a = 2.

Si a $\neq$ 0, a $\neq$ 1 y a $\neq$ 2, tenemos rango**(A) = rango(A*) = 3 = nº de incógnitas**, por el Teorema de Rouchè el **sistema es compatible y determinado y tiene solución única (como es un sistema homogéneo es la solución trivial (0, 0, 0)).**

Si a = 0, tenemos $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, rango(A) = 2.

Como rango**(A) = rango(A*) = 2 < nº de incógnitas**, por el Teorema de Rouchè el **sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución (infinitas).**

Si a = 1, tenemos $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$, rango(A) = 2.

Como rango**(A) = rango(A*) = 2 < nº de incógnitas**, por el Teorema de Rouchè el **sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución (infinitas).**

Si a = 2, tenemos $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$, rango(A) = 2.

Como rango**(A) = rango(A*) = 2 < nº de incógnitas**, por el Teorema de Rouchè el **sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución (infinitas).**
(b)
Resuelva el sistema para a = 0.

Si a = 0, tenemos $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}$.

Ya hemos visto en el apartado (a) que para a = 0 el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones (más de una). Lo resolvemos por Gauss (También se puede hacer por Cramer).

$\begin{cases}x \quad + z = 0\\ x + y \quad = 0\end{cases}$, tomado z = m $\in$ R, x = -m e y = m.

La solución del sistema es (x, y, z) = (-m, m, m) con m $\in$ R.

8.- El volumen de un tetraedro es de 10 unidades cúbicas. Si tres de sus vértices se encuentran en los puntos
A(1, 1, 1), B(-2, 1, 0) y C(0, 1, 3), halla las coordenadas del cuarto vértice D sabiendo que se encuentra en el eje Y. Escribe todas las soluciones posibles.

Solución

Como D está en el eje Y es de la forma D(0, m, 0).

Sabemos que el volumen de un tetraedro de vértices A, B, C y D es un sexto del volumen del paralelepípedo que determinan los vectores **AB** = (-3, 0, -1), **AC** = (-1, 0, 2) y **AD** = (-1, m-1, -1), es decir un sexto del valor absoluto del producto mixto de los tres vectores: $V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\cdot|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|$

Tenemos [**AB**, **AC**, **AD**] = $\begin{vmatrix}-3&0&-1\\-1&0&2\\-1&m-1&-1\end{vmatrix}$ $\begin{matrix}\text{Adjuntos}\\ \text{tercera}\\ \text{fila}\end{matrix}$ = -(m-1)(-6-1).

Nos dicen que: 10 u^3 = (1/6)| -7·(m-1) | = (7/6)·|m - 1|, lo cual nos proporciona dos ecuaciones:

Una es: 10 = (7/6)·(+(m – 1)) $\rightarrow$ 60/7 = m - 1 de donde m = 67/7. Punto D(0, 67/7, 0)

Opra es: 10 = (7/6)·(-(m – 1)) $\rightarrow$ 60/7 = -m + 1 de donde m = -53/7. Punto D(0, -53/7, 0)

9.- En una academia de artes escénicas se imparten clases de danza y teatro. De danza, hay modalidad de danza clásica y cabaret. En la academia, un 17% de individuos practica danza clásica, un 45% cabaret y un 5% ambas modalidades de danza. Si elegimos un individuo que asiste a dicha academia:
a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que practique algún tipo de danza (o los dos).
b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que practique solamente teatro.

Solución

En una academia de artes escénicas se imparten clases de danza y teatro. De danza, hay modalidad de danza clásica y cabaret. En la academia, un 17% de individuos practica danza clásica, un 45% cabaret y un 5% ambas modalidades de danza. Si elegimos un individuo que asiste a dicha academia:

(a)

Calcula la probabilidad de que practique algún tipo de danza (o los dos).

Sean los sucesos A = "practicar danza clásica" y B = "practicar cabaret".

Me están pidiendo **p(practique algún tipo de danza (o los dos)) = p(A o B) = p(A$\cup$B)**.

Nos dan p(A) = 17% = 0'17, p(B) = 45% = 0'45, p(practicar ambas) = p(A y B) = p(A$\cap$B) = 5% = 0'05.

Tenemos p**(A$\cup$B) =** p(A) + p(B) - p(A$\cap$B) = 0'17 + 0'45 - 0'05 **= 0'57.**

(b)

Calcula la probabilidad de que practique solamente teatro.

Me están pidiendo p**(practique solamente teatro) =** {suceso contrario} = **1 - p(solo danza) =**
= 1 - p(A$\cup$B) = 1 - 0'57 **= 0'43.**

10.- De los huevos que se producen diariamente en una granja, deben desecharse el 20% por no ser aptos para su consumo. Se seleccionan de manera aleatoria e independiente 5 huevos:

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que tengamos que desechar alguno de los huevos seleccionados (al menos 1).

b) (1 punto)

1. (0,5 puntos) ¿Qué es más probable, que haya exactamente 2 huevos no aptos, o que haya exactamente 3 huevos no aptos? Obtén estas probabilidades.
2. (0,5 puntos) ¿Cómo razonarías la respuesta a la pregunta anterior sin hacer uso de la calculadora?

Solución

De los huevos que se producen diariamente en una granja, deben desecharse el 20% por no ser aptos para su consumo. Se seleccionan de manera aleatoria e independiente 5 huevos:

(a)

Calcula la probabilidad de que tengamos que desechar alguno de los huevos seleccionados (al menos 1).

Recordamos que si realizamos **n** veces (5) un experimento, elegimos 5 huevos, en el que podemos obtener éxito, **F**, huevo no apto, con probabilidad **p** (p(F) = 20% = 0'2) y fracaso, $\mathbf{F^C}$, con probabilidad **q** (q = 1 - p = = 1 – 0'2 = 0'8), diremos que estamos ante una distribución binomial de parámetros **n** y **p**, y lo representaremos por **B(n; p)**.

Es decir nuestra variable **X, elegir huevo no apto, sigue una distribución binomial B(n; p)** = **B(5; 0'2)**.

En este caso la **probabilidad de obtener k éxitos**, que **es su función de probabilidad**, viene dada por:

$$\mathbf{p(X = k) = (5\ sobre\ k)\cdot (0'2)^{k}\cdot (0'8)^{(5-k)} = \binom{5}{k}\cdot (0'2)^{k}\cdot (0'8)^{(5-k)}.}$$

****** (n sobre k) = $\binom{n}{k}$ = (n!)/(k!.(n - k)!) con n! el factorial de "n". En la calculadora " n tecla **nCr** k "

En nuestro caso piden **p(desechar algún huevo) = p(X ≥ 1) =** {suceso contrario} = 1 – p(X < 1) =

= 1 - p(X = 0) = 1 - $\binom{5}{0}\cdot(0'2)^{0}\cdot(0'8)^{(5)} \cong$ **1 - 0'32768 = 0'67232.**

b) (1 punto)

1. (0,5 puntos) ¿Qué es más probable, que haya exactamente 2 huevos no aptos, o que haya exactamente 3 huevos no aptos? Obtén estas probabilidades.

En nuestro caso piden comparar **p(X = 2) y p(X = 3)**

p(X = 2) = $\binom{5}{2}\cdot(0'2)^{2}\cdot(0'8)^{(3)} \cong$ **0'2048.** p(X = 3) = $\binom{5}{3}\cdot(0'2)^{3}\cdot(0'8)^{(2)} \cong$ **0'0512.**

Vemos que es más probable que haya 2 huevos no aptos.

2.

¿Cómo razonarías la respuesta a la pregunta anterior sin hacer uso de la calculadora?

Sabemos que los números combinatorios $\binom{5}{2}$ **y** $\binom{5}{3}$ **son iguales, por tanto sería comparar las potencias** $\mathbf{(0'2)^{2}\cdot(0'8)^{(3)}}$ **y** $\mathbf{(0'2)^{3}\cdot(0'8)^{(2)}}$ **; es decir comparar 0'8 con 0'2 y vemos que 0'8 es mayor que 02.**